数理解析研究所講究録
541巻 1984年 117-131

非線形発展作用素のクラスと生成

航空技研　高橋匡康
航空技研　岩宮敏幸

§1. 序

XをBanach空間、$T>0$とし、$A=\{A(t);\ 0\leqq t\leqq T\}$をXにおける非線形作用素の族とする。このとき、次の発展方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t)\in A(t)u(t) & s<t<T \\ u(s)=x \end{cases}$$

今までに、Crandall-Pazy [1]、Evans [2]、Pavel [6] Kobayasi-Kobayashi-Oharu [4, 5] 等により、この問題の（一般化された意味での）解の存在についていくつかの十分条件が調べられている。これらの結果のあるものは、作用素$A(t)$の定義域が時刻によらず一定でなければ扱えないという制約をもつが、不変集合や局所的に消散的な作用素をいかに扱うかといった問題との関連から、定義域が変化する場

合も取扱えるような定式化が望ましい。また、これらの結果として構成される発展作用素はすべて、ある種の時間依存性を表す不等式を満足しており、解の性質の多くは、この不等式から導かれる。

一方、Pierre[7] は時刻をパラメータとする半群の族に対してその envelop という概念を導入し発展作用素を構成しているが、その発展作用素も同様の不等式を満足する。そこで、この時間依存性を表す不等式を利用して発展作用素のクラス $E(D)$（定義は§2で与える）を導入すると、半群の場合と同様に発展作用素自体を議論の対象にしてその微分可能性や生成問題等を論じることができる。

本稿では、特に生成問題を中心に得られた結果を紹介する。これらの結果は作用素の定義域が時間に依存して変化する場合にも適用できる

§2. 発展作用素のクラス

$D=\{D(t)\,;\,0\leq t\leq T\}$ を X の部分集合の族とする。

D 上の発展作用素のクラスを導入するため、まず2変数関数のクラス $\mathcal{F}$ を定義する。

<u>定義1</u>

$[0,T]\times[0,T]$ 上のすべての点で定義された可積分関

数fが次の3つの性質をもつとき、fはクラス$\mathfrak{F}$に属するという：

(i) $f(t,t)=0$, $f(t,s)=f(s,t)\geqq 0$

$f(t,s)\leqq f(t,r)+f(s,r)$

(ii) $f(\cdot,s)\in L^1(0,T)$, $f(\cdot+s,\cdot)\in L^1(0,T-s)$, $s\in[0,T)$

(iii) 各$h\in(0,T)$に対して

$$(s,r)\mapsto \int_0^h f(t+s,t+r)\,dt$$

は$[0,T-h]\times[0,T-h]$において上半連続である。

$g\in L^1(0,T;X)$に対して$f(t,s)=\|g(t)-g(s)\|$とおくとfはクラス$\mathfrak{F}$に属することに注意しておく。

さて、発展作用素のクラス$E(D)$を定義しよう。

<u>定義2</u>

非線形作用素の族$U=\{U(t,s);0\leqq s\leqq t\leqq T\}$は、$\omega\in\mathbb{R}$と$f\in\mathfrak{F}$が存在して次の3条件を満足するとき、クラス$E(D)$に属する発展作用素という：

(E1) $D(U(t,s))=D(s)$, $R(U(t,s))\subset D(t)$

$U(s,s)=I$ on $D(s)$

$U(t,s)U(s,r)=U(t,r)$ on $D(r)$, $0\leqq r\leqq s\leqq t\leqq T$.

(E2) $s\in[0,T)$, $x\in D(s)$に対し$U(t,s)x$は区間

$[s,T]$ において連続である。

(E3) $0 \leqq r \leqq s \leqq T$, $t \in [0, T-s]$, $x \in D(s)$, $y \in D(r)$ に対して、$\|U(t+s, s)x - U(t+r, r)y\|$

$$\leqq e^{\omega t}\|x-y\| + \int_0^t e^{\omega(t-\xi)} f(\xi+s, \xi+r)\, d\xi$$

が成り立つ。

$E(D)$ は ω と f に応じて subclass $E(D; \omega, f)$ に分類される。 $E(D) = \bigcup_{\substack{\omega\in\mathbb{R} \\ f\in\mathcal{F}}} E(D; \omega, f)$

クラス $E(D)$ に属する発展作用素の詳しい性質については Iwamiya-Oharu-Takahashi [3] を参照されたい。

§3. 生成定理

この節では 発展方程式

$$\text{(EE)} \quad \frac{d}{dt}u(t) \in A(t)u(t)$$

の弱解を与えるような発展作用素の構成を考える。

以下、D を $\{(s,x)\in\mathbb{R}\times X;\ s\in[0,T),\ x\in D(A(s))\}$ の $\mathbb{R}\times X$ における閉包とする。また、各 $t\in[0,T]$ に対して $D(t)=\{x\in X;\ (t,x)\in D\}$ とおくことにより D と X の部分集合の族 $\{D(t);\ 0\leqq t\leqq T\}$ を同一視する。

$U=\{U(t,s);\,0\leqq s\leqq t\leqq T\}$ をクラス $E(D)$ の発展作用素とする。U が次の性質をもつとき（EE）に付随する発展作用素と呼ぶ：

任意の $s\in[0,T)$ と $x\in D(s)$ に対して区間 $[s,T]$ の分割の列 $(\Delta_n)_{n\geq 1}$；$\Delta_n=\{s\leqq t_0^n\leqq t_1^n\leqq\cdots\leqq t_{N(n)}^n\leqq T\}$ と $x_k^n\in D(t_k^n)$，$\varepsilon_k^n\in X$ $(k=0,1,\cdots,N(n))$ が存在して

$$(w_1)\qquad \frac{x_k^n-x_{k-1}^n}{t_k^n-t_{k-1}^n}-\varepsilon_k^n\in A(t_k^n)x_k^n\qquad k=1,2,\cdots,N(n)$$

$$(w_2)\qquad \lim_{n\to\infty}|\Delta_n|=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N(n)}\|\varepsilon_k^n\|(t_k^n-t_{k-1}^n)=0$$

$$(w_3)\qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ t_k^n\to t}} x_k^n=U(t,s)x$$

が成り立つ。

以下のため次の記号を導入しておく。

$x,\,y\in X$ に対して

$$[x,y]_\lambda=\lambda^{-1}(\|x+\lambda y\|-\|x\|)\qquad \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\neq 0$$

$$[x,y]_+=\lim_{\lambda\downarrow 0}[x,y]_\lambda=\inf_{\lambda>0}[x,y]_\lambda$$

$$[x,y]_-=\lim_{\lambda\uparrow 0}[x,y]_\lambda=\sup_{\lambda<0}[x,y]_\lambda$$

とおく。

さて、(EE)に付随する発展作用素の生成定理を与えよう。

第一のものは、ある種の値域条件によって差分スキーム(w_1)の解の存在を保証するものである。まず条件を述べる。

$\omega \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \in (0,1)$, $\lambda_0\omega < 1$, $f \in \mathcal{F}$とする。

(C1) 各$t \in [0,T)$に対して$A(t)-\omega I$は消散作用素である。

(C2) $t \in [0,T)$, $\lambda \in (0,\lambda_0) \cap (0,T-t)$に対して

$$R(I-\lambda A(t+\lambda)) \supset \overline{D(A(t))}$$

(C3) $t \in [0,T)$, $\lambda \in (0,\lambda_0) \cap (0,T-t)$, $s \in [0,T)$ $x \in \overline{D(A(t))}$, $[u,v] \in A(s)$に対して

$$(1-\lambda\omega)\|(I-\lambda A(t+\lambda))^{-1}x-u\| \leqq \|x-u+\lambda v\| + \lambda f(t+\lambda, s)$$

このとき、次の定理が成り立つ。

定理1

非線形作用素の族$A=\{A(t);\ 0 \leqq t \leqq T\}$は条件(C1)-(C3)を満足すると仮定する。このとき、(EE)に付随するクラス$E(D;\omega,f)$の発展作用素$U=\{U(t,s);\ 0 \leqq s \leqq t \leqq T\}$が存在し、$U(t,s)$は$D(s)$を$\overline{D(A(t))}$の中にうつす。

さらにUは次の性質(I)をもつ。

(I) $0 \leqq s \leqq t \leqq T$, $0 \leqq r \leqq T$, $x \in D(s)$, $[z,w] \in A(r)$に対し

$$\|U(t,s)x - z\| - \|x - z\|$$
$$\leq \int_s^t \{[U(\xi,s)x - z, w]_+ + \omega\|U(\xi,s)x - z\| + f(\xi,r)\}d\xi$$

才二の生成定理は、差分スキームの解の存在を仮定しそれが収束するための条件を与える。仮定を述べる。

(C4) $\omega \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{F}$ が存在して、任意の $\lambda, \mu > 0$ と $0 \leq s, t \leq T$, $[x, y] \in A(t)$, $[u, v] \in A(s)$ に対して

$$(\lambda+\mu-\lambda\mu\omega)\|x-u\| \leq \mu\|x-\lambda y-u\| + \lambda\|u-\mu v-x\| + \lambda\mu f(t,s)$$

が成り立つ。

注意 条件(C4)は次の条件(C4)′と同値である。

(C4)′ $\omega \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{F}$ が存在して、任意の $0 \leq s, t \leq T$, $[x, y] \in A(t)$, $[u, v] \in A(s)$ に対して

$$[x-u, y]_- + [u-x, v]_- \leq \omega\|u-v\| + f(t,s)$$

定理2

非線形作用素の族 $A = \{A(t) ; 0 \leq t \leq T\}$ は条件(C4)を満足すると仮定する。さらに、任意の $s \in [0, T)$ と $x \in A(s)$ に対して区間 $[s, T]$ の分割の列 $(\Delta_n)_{n \geq 1}$;

$\Delta_n = \{s \leq t_0^n \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_{N(n)}^n \leq T\}$ と $x_k^n \in D(A(t_k^n))$ $\varepsilon_k^n \in X$ $(0 \leq k \leq N(n))$ が存在して

$$(DS)_n \quad \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{t_k^n - t_{k-1}^n} - \varepsilon_k^n \in A(t_k^n)x_k^n \;, \quad k=1,2,\cdots,N(n)$$

が成り立つと仮定する。

このとき

(i) $\lim_{n\to\infty} t_0^n = s$, $\lim_{n\to\infty} t_{N(n)}^n = T$, $\lim_{n\to\infty} x_0^n = x$

$\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N(n)} \|\varepsilon_k^n\| (t_k^n - t_{k-1}^n) = 0$

(iii) 任意の $0 \leqq r \leqq T$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N(n)} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} |f(\xi,r) - f(t_k^n,r)|\, d\xi = 0$$

が成り立つならば (EE)に付随するクラス$E(D;\omega,f)$の発展作用素$U = \{U(t,s)\,;\, 0 \leqq s \leqq t \leqq T\}$が存在する。

さらにUは定理1の場合と同様に性質(I)をもつ。

ここでは、定理1, 定理2の証明は省略するが、次の補題が使われる。

<u>補題</u>

$f \in \mathcal{F}$とする。このとき、任意の$\varepsilon > 0$に対して区間$[0,T]$の分割$\{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N < s_{N+1} = T\}$を次の条件を満足するようにとれる。

(i) $\max_{0 \leq k \leq N} (s_{k+1} - s_k) \leqq \varepsilon$

(ii) $\sum_{k=0}^{N} \int_{s_k}^{s_{k+1}} f(s_k, \xi)\, d\xi \leqq \varepsilon$

§4. Envelop

まずenvelopの定義を与える。

<u>定義3</u>

Dを$[0, T] \times X$の閉部分集合とし、$S_t(\cdot)$を$D(t)$上の半群とする。$u \in C([0,T]; X)$が次の3条件を満足するとき、半群の族$S = \{S_t ; 0 \leqq t \leqq T\}$のenvelopと呼ぶ。

(e_1) 各$t \in [0, T]$に対して　$u(t) \in D(t)$

(e_2) 各$h \in [0, T)$に対して　$t \mapsto S_t(h)u(t)$　は$[0, T-h]$上の強可測関数である。

(e_3) $$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{T-h} \| u(t+h) - S_t(h)u(t) \| \, dt = 0$$

<u>注意</u>　Pierre [7]では$u \in L^1(0, T; X)$が条件(e_1)－(e_3)を満足するときenvelopと呼び、その一意性や生成問題を論じているが、実際に構成されるenvelopは連続になるので上の定義を採用する。

$x \in X$と$D \subset X$に対してxとDの距離を$d[x, D]$と表すことにする。

(C5) 任意の $t \in [0, T)$ と $x \in D(t)$ に対して

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} d[S_t(h)x, D(t+h)] = 0$$

(C6) $\omega \geqq 0$, $f \in \mathfrak{F} \cap L^\infty([0,T] \times [0,T])$ が存在して、任意の $0 \leqq s, t \leqq T$, $x \in D(t)$, $y \in D(s)$, $h \geqq 0$ に対して

$$\| S_t(h)x - S_s(h)y \| \leqq e^{\omega h} \| x - y \| + h f(t,s)$$

このとき、次の定理を得る。

<u>定理3</u>

半群の族 $S = \{S_t ; 0 \leqq t \leqq T\}$ は条件 (C5), (C6) を満足すると仮定する。このとき、半群の族 S の envelop を与えるクラス $E(D; \omega, f)$ の発展作用素 $U = \{U(t,s); 0 \leqq s \leqq t \leqq T\}$ が存在する。

以下、定理3の証明の概略を与える。

<u>定義4</u>

$\varepsilon > 0$ とする。$\tau \in [0, T]$, u を区間 $[0, \tau]$ 上の X に値をとる関数、σ を $[0, \tau]$ 上の実数値関数、N を $[0, \tau]$ の部分集合とする。4つ組 $(u, \sigma, N, [0, \tau])$ が以下の条件 (ae0)-(ae4) を満足するとき、半群の族 $S = \{S_t ; 0 \leqq t \leqq T\}$ の（区間 $[0, \tau]$ 上の）ε-approximate envelop と呼ぶ：

(ae0)　Nは区間$[0,\tau]$の相対開部分集合で、$m(N)\leqq\varepsilon$（mはLebesgue測度），任意の$t\in[0,\tau]\setminus N$に対して

$$\liminf_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(t,t+\xi)\,d\xi=0$$ が成り立つ。

(ae1)　σは$[0,\tau]$から$[0,\tau]$への単調非減少関数で$\sigma(\tau)=\tau$，任意の$s\in[0,\tau]$に対して　$\sigma(\sigma(s))=\sigma(s)$，$s-\varepsilon\leqq\sigma(s)\leqq s$ が成り立つ。

(ae2)　uは強可測関数で任意の$s\in[0,\tau]$に対して$u(s)\in D(\sigma(s))$ が成り立つ。

(ae3)　任意の$s\in[0,\tau)$，$h\in(0,\tau-s]$，$r\in[0,T]$，$x\in D(r)$に対して

$$\begin{aligned}&\|u(s+h)-S_r(h)x\|\\&\leqq e^{\omega h}\|u(s)-x\|+\int_s^{s+h}e^{\omega(s+h-\xi)}f(\sigma(\xi),r)\,d\xi\\&\quad+\varepsilon(\sigma(s+h)-\sigma(s))\end{aligned}$$

(ae4)　任意の部分区間$[a,b]\subset[0,\tau]$に対して

$$\int_a^b f(\xi,\sigma(\xi))\,d\xi\leqq\varepsilon(b-\sigma(a))+\|f\|_\infty m(N\cap[a,b]).$$

命題

$x_0\in D(0)$，$\varepsilon>0$とする。このとき、半群の族Sの区間

$[0,T]$ 上の ε-approximate envelop $(u_\varepsilon, \sigma_\varepsilon, N_\varepsilon, [0,T])$ で $u_\varepsilon(0)=x_0$ となるものが存在する。

さらに、この ε-approximate envelop $(u_\varepsilon, \sigma_\varepsilon, N_\varepsilon, [0,T])$ は次の性質をもつようにできる：

(ae5) 任意の $\eta>0$ と η-approximate envelop $(u_\eta, \sigma_\eta, N_\eta, [0,\tau_\eta])$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\| u_\eta(r+t) - u_\varepsilon(s+t) \| \\
&\leqq e^{\omega t}\| u_\eta(r) - u_\varepsilon(s)\| + \int_0^t e^{\omega(t-\xi)} f(\sigma_\eta(r+\xi), \sigma_\varepsilon(s+\xi))\, d\xi \\
&\quad + \eta(\sigma_\eta(r+t) - \sigma_\eta(r)) + \varepsilon(\sigma_\varepsilon(s+t) - \sigma_\varepsilon(s))
\end{aligned}
$$

$0 \leqq r \leqq r+t \leqq \tau_\eta$, $0 \leqq s \leqq s+t \leqq T$.

証明. $L = \{ t \in [0,T) ; \liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\int_0^h f(t, t+\xi)\, d\xi = 0 \}$ とおくと $m(L)=0$ である。N を $[0,T]$ の相対開部分集合で $N \supset L$, $m(N) \leqq \varepsilon$ をみたすものとする。

$$
A = \left\{ \begin{array}{l} (u_\varepsilon, \sigma_\varepsilon, N_\varepsilon, [0,\tau_\varepsilon]) ; \varepsilon\text{-approximate envelop}, u_\varepsilon(0)=x_0 \\ N_\varepsilon = N \cap [0,\tau_\varepsilon], \text{性質 (ae5) をもつ} \end{array} \right\}
$$

とおく。$\tau_\varepsilon=0$, $u_\varepsilon(0)=x_0$, $\sigma_\varepsilon(0)=0$, $N_\varepsilon = N \cap \{0\}$ とおけば $(u_\varepsilon, \sigma_\varepsilon, N_\varepsilon, [0,\tau_\varepsilon]) \in A$ なので $A \neq \phi$. A に順序を導入する。$\alpha = (u_\alpha, \sigma_\alpha, N_\alpha, [0,\tau_\alpha])$, $\beta = (u_\beta, \sigma_\beta, N_\beta, [0,\tau_\beta]) \in A$ とする。$\alpha < \beta$ とは $\tau_\alpha \leqq \tau_\beta$ かつ任意の $s \in [0,\tau_\alpha]$ に対して $u_\alpha(s) = u_\beta(s)$, $\sigma_\alpha(s) = \sigma_\beta(s)$ が成り立つことと定める。この

とき、Aはこの順序に関して帰納的順序集合となる。従って Zornの補題を適用することにより、Aは極大元をもつことがわかる。$(u_\varepsilon, \sigma_\varepsilon, N_\varepsilon, [0, \tau_\varepsilon])$ をAの極大元の一つとする。$\tau_\varepsilon = T$ となる事を背理法で示そう。そのためには $\tau_\varepsilon < T$ と仮定して $(u_\varepsilon, \sigma_\varepsilon, N_\varepsilon, [0, \tau_\varepsilon])$ の拡張を構成すればよい。実際、$\tau_\varepsilon \in N$ のときは $\tau_\varepsilon' > \tau_\varepsilon$, $[\tau_\varepsilon, \tau_\varepsilon'] \subset N$ なる τ_ε' を、$\tau_\varepsilon \notin N$ のときは $\int_{\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon'} f(\tau_\varepsilon, \xi)\, d\xi \leqq \varepsilon(\tau_\varepsilon' - \tau_\varepsilon)$, $\tau_\varepsilon' > \tau_\varepsilon$ となる τ_ε' をとり

$$N_\varepsilon' = N \cap [0, \tau_\varepsilon'], \quad \sigma_\varepsilon'(s) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon(s) & (0 \leqq s \leqq \tau_\varepsilon) \\ \tau_\varepsilon & (\tau_\varepsilon < s < \tau_\varepsilon') \\ \tau_\varepsilon' & (s = \tau_\varepsilon') \end{cases}$$

$$u_\varepsilon'(s) = \begin{cases} u_\varepsilon(s) & (0 \leqq s \leqq \tau_\varepsilon) \\ S_{\tau_\varepsilon}(s - \tau_\varepsilon) u(\tau_\varepsilon) & (\tau_\varepsilon < s < \tau_\varepsilon') \\ x & (s = \tau_\varepsilon') \end{cases}$$

とおけばよい。但し x は条件(C5)により存在を保証されている $\| S_{\tau_\varepsilon}(\tau_\varepsilon' - \tau_\varepsilon) u(\tau_\varepsilon) - x \| \leqq \varepsilon(\tau_\varepsilon' - \tau_\varepsilon)$, $x \in D(\tau_\varepsilon')$ をみたす X の元である。このとき $(u_\varepsilon', \sigma_\varepsilon', N_\varepsilon', [0, \tau_\varepsilon'])$ は ε-approximate envelop である事が示される。

定理3の証明. $\varepsilon_n \to 0$ とする。上の命題により各 ε_n に対して区間 $[0, T]$ 上の性質(ae5)をもった ε_n-approximate envelop $(u_n, \sigma_n, N_n, [0, T])$, $u_n(0) = x_0$ が存在する。性質

(ae4) (ae5) により

$$\|u_n(t)-u_m(t)\| \leqq (\varepsilon_n+\varepsilon_m)(e^{\omega t}t+e^{\omega t}\|f\|_\infty+t)$$

なる評価を得る。これは $\{u_n(t)\}$ が Cauchy 列である事を示している。そこで $u(t)=\lim_{n\to\infty} u_n(t)$ とおく。性質 (ae3) と Fubini の定理により envelop の条件 (e3) も容易に確かめられる。今までの議論を任意の初期時刻 $s\in[0,T)$ で行うことにより $x\in D(s)$ に対して $u(s)=x$ となる $[s,T]$ 上の envelop の存在が示される。$U(t,s)x=u(t)$ とおけば、$U=\{U(t,s);\ 0\leqq s\leqq t\leqq T\}$ はタイプ $E(D;\omega,f)$ の発展作用素である。

参考文献

[1] M. G. Crandall and A. Pazy, Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Israel J. Math., 11 (1972).

[2] L. Evans, Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space, Israel J. Math., 26 (1977)

[3] T. Iwamiya, S. Oharu and T. Takahashi, On the class of nonlinear evolution operators in Banach spaces, preprint

[4] K. Kobayasi, Y. Kobayashi and S. Oharu, Nonlinear evolution operators in Banach spaces, to appear in

Osaka J. Math.

[5] K. Kobayasi, Y. Kobayashi and S. Oharu, Nonlinear evolution operators in Banach spaces II, to appear in Hiroshima Math. J.

[6] N. H. Pavel, Nonlinear evolution equations governed by f-quasi-dissipative operators, Nonlinear Analysis, TMA, 5 (1981)

[7] M. Pierre, Enveloppe d'un famille de semi-groupes nonlineaires et equations d'evolution, Seminaire d'Analyse Non-lineaire, Univ. de Besançon, (25) (1976-1977)